【统计理论与方法】

基于傅里叶变换的时变参数回归模型：估计、设定检验和实证应用

杨利雄[1]，李庆男[2]

（1. 兰州大学 管理学院 甘肃 兰州 730000；2. “中山大学” 经济研究所 台湾 高雄 80611）

摘要：回归模型参数的时变性会严重影响模型的拟合程度和预测效果。基于卡尔曼滤波的时变参数模型需要估计很多的参数，因而造成效率损失。基于傅里叶变换建立一个简单的变系数回归模型，给出估计方法并证明参数收敛于真实值，并给出了模型设定检验的方法。通过蒙特卡洛模拟表明：新建立的时变参数回归模型能很好地处理连续的、随机的和跳跃的时变参数模型。最后，将新建立的方法应用于研究股市联动关系，发现：不考虑系数的时变性可能给出误导性结论，考虑时变性能捕捉更为丰富的联动特征。

关键词：时变参数；傅里叶变换；蒙特卡洛模拟；联动

中图分类号：F224：O212　　文献标志码：A　　文章编号：1007-3116(2018)02-0010-07

一、引 言

在过去几十年里，已有的计量模型和经济管理类实证研究多基于线性回归模型[1]，且线性回归模型还被施加了诸多严格的假设，如参数为常数。同时，学者已认识到非线性在经济现象中的普遍存在性[2-3]，但 Granger 证明，任何非线性模型都能被一个时变参数的线性模型很好地近似[1]。从而线性模型因其简洁性成为诸多研究中的首选。

然而，对时变参数的线性模型研究还很不够。模型参数的时变性会影响模型的拟合优度及造成预测的失败[3]。现有的考虑模型系数时变性特征的方法多基于卡尔曼滤波[4]505－506，然而其不仅需要估计观测模型的系数，还需要估计状态方程的协方差矩阵，太多的参数估计不仅造成效率的损失，还损失了简洁性进而影响了其在实际问题中的应用。

傅里叶变换通过三角函数序列能以任意的精度逼近绝对可积的函数。同时 Becker 等证明低频的傅里叶函数就能很好地解决很多常见的时变特征[2]。Enders 和 Lee 等使用傅里叶变换处理单位根检验中的时变参数问题[5-6]。杨利雄和张春丽使用傅里叶变换处理协整模型中的结构突变，发现能较好地捕捉结构突变从而促进参数估计的效率[7]。

本文基于傅里叶变换和简单最小二乘回归模型框架建立了一个简单易用的时变参数线性回归模型，并给出了其估计和模型的设定检验方法。通过使用傅里叶变换近似时变参数，从而得到一个包含三角函数项、三角函数与自变量交叉项的回归模型作为辅助回归，并证明模型的参数估计是收敛于真实值的，进一步得到的时变参数的估计也是收敛于真实值的。另一方面，当模型参数本身无时变性时，使用时变参数模型方法会估计多余的参数，而估计多余的参数会损失效率，因而本文建立了模型设定检验以帮助选择是否使用时变参数模型。然后，使用蒙特卡洛模拟方法，考察基于傅里叶变换的时变参数模型处理常见的时变参数类型的效果，发现新的时变参数模型能很好地处理连续的、随机的和跳跃的时变参数线性模型。新方法的一个主要优点是模型的简洁性和应用的便捷性。

最后，将新建立的时变参数线性模型应用于研

收稿日期：2017-04-28

基金项目：中央高校基本科研业务费专项资金《含非线性的平稳变量间的虚假回归问题研究》(15LZUJBWZY097)

作者简介：杨利雄，男，甘肃陇南人，经济学博士，讲师，研究方向：金融市场，时间序列分析；
李庆男，男，台湾高雄人，经济学博士，教授，研究方向：计量经济学。

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

究中美两国股市的联动性，发现考虑模型参数的时变性特征后能显著提升模型的拟合优度；同时，时变参数模型能得到更为丰富的联动特征，帮助理解联动现象或帮助投资者在全球分散风险，而忽略模型参数的时变性可能得到错误结论。

二、时变参数回归模型理论：估计和设定检验

本节建立基于傅里叶变换的时变参数线性回归模型，并给出其参数估计方法、估计的收敛性特征，同时给出模型的设定检验。

（一）基于傅里叶变换的时变参数模型及其估计

考虑如下时变参数的模型：

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + \varepsilon_t \tag{1}$$

假设 y_t 和 x_t 是平稳变量且模型（1）满足经典回归所需的条件，其中 x_t 和 y_t 可以是向量的形式，α_t 和 β_t 是时变参数。

近年来，学界已经认识到使用傅里叶变换近似时变性特征（如非线性和结构突变）的优点[2]。傅里叶函数近似时变性的方法不需要假设时变性的先验知识，因而可避免时变参数类型误设问题，另外傅里叶函数也可以处理非线性趋势，这使得该方法十分具有竞争力[8]。

只要 α_t 和 β_t 是时间 t 的绝对可积函数，则傅里叶变换可以以任意的精度近似 α_t，β_t：

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\sin(2\pi kt/T) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\cos(2\pi kt/T) \quad n \leqslant T/2 \tag{2}$$

$$\beta_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n}\beta_{1k}\sin(2\pi kt/T) + \sum_{k=1}^{n}\beta_{2k}\cos(2\pi kt/T) \quad n \leqslant T/2 \tag{3}$$

其中，n 代表傅里叶近似中包含的频率的个数，k 表示某一特定的频率，T 是样本数。

单频的傅里叶函数就能很好地近似常见的时变性结构[2]，为了模型推导的方便考虑如下单频的时变参数近似：

$$\alpha_t \cong \alpha_0 + \alpha_{11}\sin(2\pi kt/T) + \alpha_{21}\cos(2\pi kt/T) \tag{4}$$

$$\beta_t \cong \beta_0 + \beta_{11}\sin(2\pi kt/T) + \beta_{21}\cos(2\pi kt/T) \tag{5}$$

将式（4）和式（5）代入时变参数模型（1）可得如下辅助回归模型：

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_{11}\sin(2\pi kt/T) + \alpha_{21}\cos(2\pi kt/T) + \beta_0 x_t + \beta_{11} x_t\sin(2\pi kt/T) + \beta_{21} x_t\cos(2\pi kt/T) + \varepsilon_t \tag{6}$$

对于频率参数 k 的选择，参照 Becker 等人的做法[2]，从 1，2，3，4，5 中选择，可使用最小化残差平方和的方法，分别选择 $k=1,2,3,4,5$，计算式（6）最小二乘估计的残差平方和 SSR（k），选择能使 SSR（k）最小的参数 k 即可。

因为 $x_t\sin(2\pi kt/T)$ 和 $x_t\cos(2\pi kt/T)$ 不再严格满足弱平稳的定义，因而传统的最小二乘回归的理论（如系数的收敛性特征等）可能不再成立。因而本文先推导辅助回归模型的系数估计的收敛性。

定理 1 模型（6）中参数的最小二乘估计是收敛的，其收敛速度均为 $O(T^{-1/2})$。

证明：为了方便推导，先定义如下向量：

$$\tau = [1,2,\cdots,T]',\ \Upsilon_1 = [\sin(2\pi k1/T)\ \sin(2\pi k2/T),\cdots,\sin(2\pi kT/T)]$$

$$\Upsilon_2 = [\cos(2\pi k1/T),\cos(2\pi k2/T)\ \cdots,\cos(2\pi kT/T)]$$

$$\Upsilon_3 = [x_1\sin(2\pi k1/T),x_2\sin(2\pi k2/T)\ \cdots,x_T\sin(2\pi kT/T)]$$

$$\Upsilon_4 = [x_1\cos(2\pi k1/T),x_2\cos(2\pi k2/T)\ \cdots,x_T\cos(2\pi kT/T)]$$

$$G = [\tau,\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3,\Upsilon_4]$$

$$\theta = [\alpha_0,\alpha_{11},\alpha_{21},\beta_0,\beta_{11},\beta_{21}]'$$

则模型（6）中参数的最小二乘估计 $\hat{\theta}$ 与真实值 θ 之差为：

$$\hat{\theta} - \theta = (G'G)^{-1}G'\varepsilon \tag{7}$$

根据 Hamilton 和 Becker 等人给出的变量有界性特征[2][4]505－506，有：

$$\begin{aligned}\hat{\theta} - \theta &= (G'G/T)^{-1}\frac{G'\varepsilon}{T}\\ &= \left[\frac{1}{T}[\tau,\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3,\Upsilon_4]'[\tau,\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3,\Upsilon_4]\right]^{-1}\frac{1}{T}[\tau,\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3,\Upsilon_4]'\varepsilon\\ &= \begin{bmatrix}\frac{\tau'\tau}{T} & \frac{\tau'\Upsilon_1}{T} & \frac{\tau'\Upsilon_2}{T} & \frac{\tau'\Upsilon_3}{T} & \frac{\tau'\Upsilon_4}{T}\\ \frac{\Upsilon_1'\tau}{T} & \frac{\Upsilon_1'\Upsilon_1}{T} & \frac{\Upsilon_1'\Upsilon_2}{T} & \frac{\Upsilon_1'\Upsilon_3}{T} & \frac{\Upsilon_1'\Upsilon_4}{T}\\ \frac{\Upsilon_2'\tau}{T} & \frac{\Upsilon_2'\Upsilon_1}{T} & \frac{\Upsilon_2'\Upsilon_2}{T} & \frac{\Upsilon_2'\Upsilon_3}{T} & \frac{\Upsilon_2'\Upsilon_4}{T}\\ \frac{\Upsilon_3'\tau}{T} & \frac{\Upsilon_3'\Upsilon_1}{T} & \frac{\Upsilon_3'\Upsilon_2}{T} & \frac{\Upsilon_3'\Upsilon_3}{T} & \frac{\Upsilon_3'\Upsilon_4}{T}\\ \frac{\Upsilon_4'\tau}{T} & \frac{\Upsilon_4'\Upsilon_1}{T} & \frac{\Upsilon_4'\Upsilon_2}{T} & \frac{\Upsilon_4'\Upsilon_3}{T} & \frac{\Upsilon_4'\Upsilon_4}{T}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\tau'\varepsilon}{T}\\ \frac{\Upsilon_1'\varepsilon}{T}\\ \frac{\Upsilon_2'\varepsilon}{T}\\ \frac{\Upsilon_3'\varepsilon}{T}\\ \frac{\Upsilon_4'\varepsilon}{T}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \begin{bmatrix} O(T^{-1/2}) \\ O(T^{-1/2}) \\ O(T^{-1/2}) \\ O(T^{-1/2}) \\ O(T^{-1/2}) \end{bmatrix}$$

因而模型(6)中的参数均收敛于真实值，收敛速度为 $\sqrt{T}$。据此，将模型(6)中的参数估计代入式(4)和式(5)得到 α_t 和 β_t 的估计：$\hat{\alpha}_t \cong \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11}\sin(2\pi kt/T) + \hat{\alpha}_{21}\cos(2\pi kt/T)$ 和 $\hat{\beta}_t \cong \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11}\sin(2\pi kt/T) + \hat{\beta}_{21}\cos(2\pi kt/T)$。根据定理1易知：$\hat{\alpha}_t$ 和 $\hat{\beta}_t$ 以 $\sqrt{T}$ 的速度收敛于真实值 α_t 和 β_t。上述结果归纳为定理2。

定理2 基于模型(6)中参数的最小二乘估计，构造如下估计量：

$$\hat{\alpha}_t \cong \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{11}\sin(2\pi kt/T) + \hat{\alpha}_{21}\cos(2\pi kt/T)$$

$$\hat{\beta}_t \cong \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11}\sin(2\pi kt/T) + \hat{\beta}_{21}\cos(2\pi kt/T)$$

则上述估计量以 $\sqrt{T}$ 的速度收敛于时变参数模型(1)中的真实值，即 $\hat{\alpha}_t \to \alpha_t$，$\hat{\beta}_t \to \beta_t$。

(二)模型设定检验

估计不必要的参数会带来效率损失，因而当模型不含时变性时，考虑时变性是不合意的。因此，在使用时变参数回归模型之前，有必要检验系数时变性特征的存在性。

如果模型(1)中系数不含时变性，则模型(6)中 $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{11} = \beta_{21} = 0$。这一特征可以用来做模型的设定检验。即为了决定是否应该考虑结构突变特征，可以检验如下原假设：

$$H_0: \alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{11} = \beta_{21} = 0 \tag{8}$$

设 SSR_0 为回归模型 $y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \varepsilon_t$ 的残差平方和；SSR_1 为回归模型(6)的残差平方和。则下列 F 统计量可以用来检验原假设：

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/4}{SSR_1/(T-6)} \tag{9}$$

上述 F 统计量服从自由度为4和 $T-6$ 的 F 分布。F 统计量拒绝上述原假设是模型(1)的系数不含时变性的信号。

使用传统的 F 检验做设定检验，虽然理论简单且易于使用，但其小样本性质差①[9]。Kiefer 等提出通过对最小二乘回归的残差进行转换[10]，从而构造稳健统计量的方法，其方法被证明具有优良的小样本性质[11]。因此，本文通过转换最小二乘回归的残差构造稳健的设定检验。

为了方便构造统计量，先将模型(6)的最小二乘估计表示为如下向量形式：

$$y_t = X_t'\hat{\beta} + \hat{u}_t \tag{10}$$

其中，$x_t = [1, \sin(2\pi kt/T), \cos(2\pi kt/T), x_t, x_t\sin(2\pi kt/T), x_t\cos(2\pi kt/T)]'$，

$\hat{\beta} = [\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{21}, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21}]'$，$\hat{u}_t$ 为回归残差。

定义 $\hat{S}_t = \sum_{s=1}^{t} x_s \hat{u}_s$，Kiefer 等证明[10]：

$$\hat{C} = T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\hat{S}_t\hat{S}_t \to \Omega^{1/2}\left[\int_0^1 [W_4(r) - rW_4(1)][W_4(r) - rW_4(1)]'dr\right]\Omega'^{1/2}$$

其中，Ω 为 $X_t u_t$ 的协方差矩阵，$W_4(r)$ 为4维的相互独立的标准维纳过程。

为了检验原假设 H_0，进一步定义 $\hat{b} = (T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_t X'_t)\hat{C}(T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t X'_t)^{-1}$，则根据 Kiefer 等的定理1[10]，有：

$$F^* = T(R\hat{\beta} - b)'[R\hat{B}R']^{-1}(R\hat{\beta} - b)/4 \xrightarrow{T} W_4(1)P_4^{-1}W_4/4 \tag{11}$$

式中 $P_4 = \int_0^1 [W_4(r) - rW(1)][W_4(r) - rW(1)]'dr$，$R = \mathrm{diag}[0,1,1,0,1,1]$，$b$ 为4维的零向量。

式(11)中的极限分布不是标准的 F 分布，但其极限分布不依赖于冗余参数。通过使用正态分布的随机数叠加近似维纳过程，使用随机模拟给出其临界值。该检验1%、5%和10%的临界值分别为108.22、65.35和48.71。

三、蒙特卡洛模拟

(一)基于傅里叶变换的时变参数模型的表现

讨论了基于傅里叶变换的时变参数回归模型的设定和系数的收敛速度，本节使用蒙特卡洛模拟研究前文建立的基于傅里叶变换的时变参数回归理论处理时变参数问题的效果。使用模拟的数据对比回归模型 $y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$ 和回归模型(6)在拟合随机模拟数据时的拟合优度。

1. 数据生成过程

考虑三种常见的时变参数数据生成过程：连续

① 误差项服从独立同分布时，传统 F 检验具有良好的有限样本表现。

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的、随机的、跳跃的时变参数模型。

1）连续的时变参数

考虑如下的数据生成过程：

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + \varepsilon_t \tag{12}$$

$$\alpha_t \cong \alpha_0 + \alpha_{11}\sin(2\pi kt/T) + \alpha_{21}\cos(2\pi kt/T) \tag{13}$$

$$\beta_t \cong \beta_0 + \beta_{11}\sin(2\pi kt/T) + \beta_{21}\cos(2\pi kt/T) \tag{14}$$

其中 $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}\ N(0,1)$，$t = 1,2,\cdots,T$。模拟时选取如下参数：$k = 1$，$\alpha_0 = \beta_0 = 0$，$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{11} = \beta_{21} = 1$，样本 T 分别选取 100 和1 000。

2）随机的时变参数

考虑如下系数随机的数据生成过程：

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + \varepsilon_t \tag{15}$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \nu_{1t} \tag{16}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \nu_{2t} \tag{17}$$

其中，$\varepsilon_t, \nu_{1t}, \nu_{2t} \sim \text{i.i.d.}\ N(0,1)$ 且相互独立。

3）跳跃的时变参数

考虑如下具有跳跃特征的时变参数数据生成过程：

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + \varepsilon_t \tag{18}$$

$$\alpha_t = \begin{cases} \alpha_1, t < T_a \\ \alpha_2, t \geqslant T_a \end{cases} \tag{19}$$

$$\beta_t = \begin{cases} \beta_1, t < T_b \\ \beta_2, t \geqslant T_b \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}\ N(0,1)$ 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，$\beta_1 \neq \beta_2$。模拟时选取参数 $\alpha_1 = \beta_1 = 1$，$\alpha_2 = \beta_2 = 2$。

2. 蒙特卡洛模拟结果分析

选取样本容量 $T = 1\ 000$，使用数据生成过程式(12)～(14)生成样本，并使用简单的回归模型 $y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$ 时，发现估计的系数均在 10% 的显著性水平下不显著，且拟合优度 R^2 仅为0.002 2；样本 $T = 100$ 时且使用简单回归模型 $y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$ 时有类似的结论，即估计的系数均在 10% 的显著性水平下不显著，且拟合优度 R^2 仅为0.016 8。然而，在样本 $T = 1\ 000$ 和 100 时使用模型(6)得到的拟合优度 R^2 分别为 0.52 和 0.44。进一步地，使用前文式(9)给出的 F 分布做模型的设定检验，F 统计量在 1% 的显著性水平下拒绝了原假设，因而应该使用时变参数模型。

用随机时变参数模型(15-17)和跳跃时变参数模型(18-20)生成样本，使用模型(6)均能显著地提高模型的拟合优度，且据模型设定检验(9)中的 F 统计量都能在 1% 的显著性水平下拒绝原假设，因而 F 检验的证据支持时变参数模型。

综上，模拟表明：本文的基于傅里叶变换的时变参数模型对常见的时变参数数据生成过程都有较好的处理效果。

（二）模型设定检验的有限样本表现

为了对比前文模型设定检验的表现，从而更加直观地理解其优良性，本节使用蒙特卡洛模拟考察前文模型设定检验的小样本性质。

在考虑模型设定检验的检验水平时，选取原假设下的数据生成过程 $y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + e_t$，其中选取参数 $\alpha_0 = \beta_0 = 1$；在考虑检验功效时，选取备择假设下数据生成过程：$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + e_t$，其中 α_t，β_t 分别由式(13)和式(14)所示，其中的参数选择 $k = 1$，$\alpha_0 = \beta_0 = 1$，$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{11} = \beta_{21} = 0.1$。另外设置 $e_t = \rho e_{t-1} + \xi_t$，$\xi_t \sim \text{i.i.d.}\ N(0,1)$，选取参数 $\rho = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$。

表 1 给出了在 5% 的显著性水平下，使用传统的 F 检验和基于转换最小二乘残差建立的稳健检验的有限样本表现。随机模拟使用 GAUSS 9.0 编程完成，每次模拟重复 10 000 次。

模拟的结果表明：随着回归模型误差项自相关程度的增强，传统 F 检验以非常高的频率错误地拒绝原假设，即存在严重的检验水平扭曲（size distortion）问题，且这种检验水平的扭曲随样本的增加并无明显改善；与之对比，F^* 统计量具有无检验水平扭曲的特点。另一方面，从检验功效的角度来看，F^* 的检验功效略低于传统的 F 检验，但这种检验功效的损失并不严重。

给定常用计量软件中的统计量多为传统 F 检验，模拟结果对传统 F 检验的使用给予了警示。为了得到更为准确的结果，F^* 统计量应该是一个更好的选择，尤其是在误差项存在高度自相关的情况下。

表 1　设定检验 F 和 F^* 的有限样本性质

样本容量	误差项自相关系数	检验水平		检验功效	
	ρ	F	F^*	F	F^*
T=100	0.10	0.07	0.02	0.38	0.31
	0.25	0.06	0.02	0.40	0.36
	0.50	0.26	0.03	0.45	0.42
	0.75	0.61	0.05	0.60	0.52
	0.90	0.88	0.08	0.89	0.77
T=1 000	0.10	0.04	0.02	1.00	0.98
	0.25	0.05	0.03	1.00	0.93
	0.50	0.35	0.04	1.00	0.92
	0.75	0.56	0.04	0.94	0.88
	0.90	0.87	0.05	0.95	0.85

注：检验水平为原假设成立时 5% 的显著性水平下的拒绝率；检验功效为备择假设成立时 5% 的显著性水平下的拒绝率。

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

四、实证应用

股票市场之间的联动关系是投资者在全球分散风险的重要依据，当股票市场之间存在密切的联动关系时，投资者在全球分散投资的收益是非常有限的[12]，而市场之间的联动关系具有时变性已经成为共识。因而股票市场间时变性关系的考察是调整投资组合的主要依据。

随着中国的迅速崛起，中国股票市场对全球其他市场的影响力越来越强[13]，因而研究中国与美国股票市场的联动关系对投资者在国际市场间配置资产具有重要意义。本文使用前文的时变参数线性模型考虑时变参数对研究中美两国股市联动的重要性。

基于协整理论研究股市联动的文献中一般考虑如下的回归模型：

$$S_{ch,t} = \alpha + \beta S_{us,t} + \delta t + e_t \tag{21}$$

考虑系数的时变性特征，可以建立如下时变参数回归模型：

$$S_{ch,t} = \alpha_t + \beta_t S_{us,t} + \delta_t t + e_t \tag{22}$$

其中，a_t，β_t 如式(4)和式(5)所示，$S_{ch,t}$，$S_{us,t}$ 分别代表中国的上证综指和美国的道琼斯指数。本文选取的时间段为 1990 年 12 月 19 日到 2014 年 12 月 31 日。

首先使用式(9)中的模型设定性检验判断时变参数的存在性，从而以便在模型(21)和(22)之间做出选择。基于模型(21)的残差平方和 $SSR_0 = 1.95 \times 10^9$，基于模型(22)的残差平方和 $SSR_1 = 1.22 \times 10^9$，从而容易计算出式(9)中 F 统计量的值：$F = 301$。基于式(11)的 F^* 统计量为：$F^* = 94.58$。两者均能在 5%的显著性水平下拒绝参数为常数的假设。因而应该选择考虑时变参数的模型(22)。所以考虑如下模型：

$$\begin{aligned} S_{ch,t} = {} & \alpha + \alpha_{11}\sin(2\pi kt) + \alpha_{21}\cos(2\pi kt) + \\ & \beta S_{us,t} + \beta_{11}\sin(2\pi kt) S_{us,t} + \\ & \beta_{21}\cos(2\pi kt) S_{us,t} + \delta t + \delta_{11} t\sin(2\pi kt) + \\ & \delta_{21} t\cos(2\pi kt) + e_t \end{aligned} \tag{23}$$

对于频率参数 k 的选择，参照 Becker 等人的做法[2]，从 1，2，3，4，5 中选择，可使用最小化残差平方和的方法，分别选择 $k = 1,2,3,4,5$，计算式(6)最小二乘估计的残差平方和 $SSR(k)$，则 $\hat{k} = \min_{k \in \{1,2,3,4,5\}} SSR(k)$。

使用最小二乘法估计回归方程(23)得到：

$$\begin{aligned} S_{ch} = {} & 5\,222.73 - 1\,327.42\sin(2\pi kt) - \\ & 4\,521.26\cos(2\pi kt) + 0.16 S_{us} - \\ & 0.33 S_{us}\sin(2\pi kt) - 0.13 S_{us,t}\cos(2\pi kt) - \\ & 2.04t + 0.49t\sin(2\pi kt) + \\ & 2.33t\cos(2\pi kt) + e_t \end{aligned} \tag{24}$$

式(24)中所有系数在 1%的显著性水平下显著，其 R^2 为 0.772，相对于基于模型(21)得到的 $R^2 = 0.634$ 有很大的提高。

因而，可以得到时变参数模型估计：

$$\hat{S}_{ch,t} = \hat{\alpha}_t + \hat{\beta}_t S_{us,t} + \hat{\delta}_t t \tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_t = {} & 5222.73 - 1327.42\sin(2\pi\hat{k}t) \\ & - 4521.26\cos(2\pi\hat{k}t) \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_t = 0.16 - 0.33\sin(2\pi\hat{k}t) - 0.13\cos(2\pi\hat{k}t)$$

$$\hat{\delta}_t = -2.04 + 0.49\sin(2\pi\hat{k}t) + 2.33\cos(2\pi\hat{k}t)$$

$$\hat{k} = 1$$

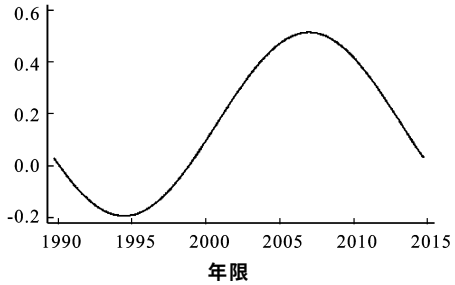

图 1　模型(25)中 $\hat{\beta}_t$ 的估计图

基于上述估计，发现中国与美国股市联动的关系存在明显的时变性特征，其联动关系既可能存在正向的联动也可能存在负向的联动(见图 1)：1990 年至 2000 年中国与美国股市的联动关系为负向的；2000 年到 2014 年前后，中国与美国股市的联动关系为正向的。而非基于式(19)所得到的恒为正向的联动关系($\hat{\beta} = 0.109$，p 值为 0.000)。因而，不考虑模型系数的时变性特征可能造成误导性结论。

另一类文献，注重基于股市收益率分析市场间的联动关系，如基于 GARCH 族模型或基于收益率之间回归的研究[14]。本文考虑基于回归模型的市场间联动。若不考虑模型参数的时变性，则建立如下模型：

$$r_{ch,t} = a + \beta r_{us,t} + e_t \tag{26}$$

考虑到回归模型参数的时变性特征，则应当建立如下模型：

$$r_{ch,t} = a_t + \beta_t r_{us,t} + e_t \tag{27}$$

其中 a_t，β_t 如(4)和(5)所示，$r_{ch,t}$，$r_{us,t}$ 分别为中国股市和美国股市的收益率。

为了在模型(26)和(27)之间做选择，先计算出

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式(9)中 F 统计量的值：$F=522.28$。基于式(11)的 F^* 统计量为：$F^*=114.21$。均在 1%的显著性水平下拒绝了参数为常数的假设，因而模型设定检验支持使用模型(27)。

基于模型(26)分析发现 β 系数的估计不显著(p 值为 0.61)，从而得到中美两国股市收益率不存在相关性的结论；如果基于模型(27)则发现：中美两国股市收益率之间的关系存在非常显著的时变性特征(p 值为 0.004)，$\hat{\beta}_t=0.77\sin(2\pi kt)-0.13\cos(2\pi kt)$。不同时间段，中美两国收益率可能呈现出正或负的相关性，这个结论为投资者提供了调整投资组合的机会。总而言之，在研究股市联动性时，不管是基于股票指数还是基于收益率，如果忽视模型参数的时变性特征，则容易得到错误的结论。

本文基于简单的时变参数模型得到的结论与文献基于复杂模型得到的结论一致。例如：在协整回归框架下，Zhang 和 Li 发现中国股市与美国股市之间的联动关系存在时变性，且在金融危机时期联动性显著增强[15]；Chou 和 Cai 使用双平滑转移条件相关-条件自相关模型(Double Smooth Transition Conditional Correlation-conditional Autoregressive Range model)考察股市联动问题，发现中国股市与美国股市之间的联动关系存在显著的时变性特征[16]。因此，如果不考虑参数的时变性特征，基于简单的线性回归模型可能得到错误结果；如果考虑参数的时变性，本文的时变参数回归模型可以很好地处理实证问题。

五、结 论

过去几十年里，线性模型在计量经济学和实证经济管理类文献中被普遍研究和使用。虽然非线性被发现普遍存在于经济现象中，由于非线性模型往往能被线性模型很好地近似，因而线性模型在实际应用中依然十分受欢迎。然而，含时变参数的线性模型还很少被研究，而模型参数的时变性是模型拟合优度与预测的重要障碍。

本文基于傅里叶变换建立了一个考虑回归模型系数时变性特征的方法，并给出了模型的估计方法和设定检验。使用蒙特卡洛模拟表明：新建立的方法能很好地处理各种常见的时变参数类型，如连续的时变参数、随机的时变参数和跳跃的时变参数；传统的 F 检验存在严重的检验水平扭曲，F^* 统计量无检验水平扭曲的问题且易于计算。本文的方法具有模型的简洁性和应用的便捷性特征。

最后，本文将该方法应用于研究中美两国的股市联动特征分析。发现不管是基于股票指数序列还是基于收益率序列，考虑模型参数的时变性特征都能显著提升模型的拟合优度，同时能提供更为丰富的联动特征帮助投资者在全球范围分散投资。反之，若不考虑参数的时变性，则可能得到错误结论。对比研究本文的时变参数线性模型与基于卡尔曼滤波的时变参数模型的优劣及其各自发挥优势的条件，是未来值得研究的课题。

参考文献：

[1] Granger C W. Non-linear Models: Where do We Go Next-Time Varying Parameter Models? [J]. Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 2008, 12(3).

[2] Beckers R, Enders W, Lee J. A Stationary Test in the Presence of an Unknown Number of Smooth Breaks [J]. Journal of time series Analysis, 2006, 27(1).

[3] D′ Agostino A, Gambetti L, Giannone D. Macroeconomic Forecasting and Structural change [J]. Journal of Applied Econometrics, 2013, 28(1).

[4] Hamilton J D. Time Series Analysis[M]. Princeton: Princeton university press, 1994.

[5] Enders W, Lee J. The Flexible Fourier form and Dickey-Fuller Type Unit Root Tests [J]. Economics Letters, 2012, 117(1).

[6] Lee C, Wu J L, Yang L. A Simple Panel Unit-Root Test with Smooth Breaks in the Presence of a Multifactor Error Structure[J]. Oxford Bulletin of Economics & Statistics, 2015, 78(3).

[7] 杨利雄，张春丽. 基于傅里叶变换的含确定性趋势结构突变的协整回归模型和不等方差检验[J]. 统计研究，2014(11).

[8] 杨利雄，张春丽，李庆男. 含非线性的平稳变量之间的虚假回归研究[J]. 统计与信息论坛，2016(1).

[9] Sun Y. Let's Fix It: Fixed-b Asymptotics Versus Small-b Asymptotics in Heteroskedasticity and Autocorrelation Robust Inference[J]. Journal of Econometrics, 2014, 178(2).

[10] Kiefer N M, Vogelsang T J. Bunzel H. Simple Robust Testing of Regression Hypotheses[J]. Econometrica, 2000, 68(3).

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[11] Yang L, Lee C, Shie F. How Close a Relationship Does a Capital Market Have with Other Such Markets? A Re-Examination Based on the Equal Variance Test [J]. Pacific-Basin Finance Journal, 2014, 26(3).

[12] Diamandis P F. International Stock Market Iinkages: Evidence from Latin America[J]. Global Finance Journal, 2009, 20(1).

[13] 杨利雄,李庆男. 中国股市与国际股市联动关系的"密切"程度[J]. 山西财经大学学报, 2013(3).

[14] 蔡义杰,周雨田,李丹. 次贷危机下美国和全球股市之联动[J]. 国际金融研究, 2009(9).

[15] Zhang B, Li X M. Has There Been any Change in the Comovement Between the Chinese and US Stock Markets? [J]. International Review of Economics & Finance, 2014, 29(1).

[16] Chou R Y, Cai Y. Range-based Multivariate Volatility Model with Double Smooth Transition in Conditional Correlation [J]. Global Finance Journal, 2009, 20(2).

A Time-varying Parameter Regression Model Based on Fourier Transformation: Estimation, Specification and Application

YANG Li-xiong[1], LI Qing-nan[2]

(1. School of Management, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;

2. Institute of Economics, "Sun Yat-sen University", Gaoxiong 80611, China)

Abstract: The time-varying characteristics of parameters in regression model can deteriorate the fitness and forecasting. The time-varying model based on Kalman? filtering has many parameters to estimate, which can lead to inefficiency. This paper introduces a time-varying model based on Fourier transformation and shows that the estimators of parameters converge to the true value. Via simulations, we show that the new time-varying model can deal with the continuous, random and abrupt time-varying parameters. Then, the new method is used to examine the co-movement relationship between stock market of China and that of US. The empirical results imply that the time-varying model can capture more abundant interaction, while the classical model can obtain misleading conclusions.

Key words: time-vary parameters; fourier transformation; Monte-Carlo simulation; co-movement

(责任编辑:马　慧)

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net