此文刊登于《统计研究》2013 第 11 期

平滑结构突变下 Dickey-Fuller 检验的大样本行为

【摘要】：Enders 和 Lee（2012）提出考虑平滑结构突变的傅里叶函数扩展型 Dickey-Fuller 单位根检验（FADF）。本文研究当真实数据生成过程包含平滑结构突变时，标准 Dickey-Fuller 单位根检验的行为。本文证明：忽略结构突变的 OLS 回归方程中，检验单位根的 t 统计量的渐进分布与 Dickey-Fuller（1979）一样。因此，当真实数据生成过程含傅里叶型结构突变时忽略该结构突变，或不正确地考虑了加入傅里叶项考虑结构突变，标准 DF 单位根检验的渐进分布依然是大样本可用的。蒙特卡洛模拟的证据与本文的理论相符。然而，模拟也指出：FADF 对含平滑结构突变和瞬时结构突变的时间序列都有理想的小样本性质，而不正确地处理傅里叶项会扭曲 DF 单位根检验的小样本性质。

关键词：傅里叶函数扩展型单位根检验(FADF)，标准 DF 检验，检验功效

中图分类号　F224.0　　文献标识码　A

The asymptotic behavior of the Dickey-Fuller test under the smooth structure changes

Abstract: Enders and Lee (2012) propose a Fourier function augmented Dickey-Fuller unit root test (FADF) under the smooth breaks. This paper considers the asymptotic behavior of the standard Dickey-Fuller unit root test when the true data generating process contains smooth breaks. We show that, in the OLS regression, the t-ratio statistics for testing unit root has the same asymptotic distribution as that of Dickey and Fuller (1979). That is, the asymptotic validity of the DF test under the null is not affected by no allowance for a break when there is a break, or by the allowance for a break when there is no break. The Monte Carlo simulations support our theory. Meanwhile, simulation also indicates that FADF has good performance for time series with smooth breaks or abrupt break in small samples, and the incorrect treatment of Fourier terms can deteriorate the finite sample properties of DF test.

Keywords: Fourier function augmented DF unit root test, standard DF test, power

一、文献综述

Perron (1989)阐明了单位根检验中考虑结构突变的重要性，并在结构突变点外生的假定下重新推导了单位根检验统计量的渐进分布，指出多数美国宏观经济数据都可以描述为带结构突变的平稳过程，而不是 Nelson 和 Plosser (1982)使用标准 DF 检验所得到的单位根过程。

这在文献中被称为“Perron 现象”。虽然，外生结构突变点的假定使得我们很容易地通过加入一个虚拟变量来增加检验功效，但是实际应用中结构突变点常常是未知的。为了处理内生的结构突变点，Zivot 和 Andrews（1992）提出估计结构突变点的方法，并且被扩展到存在两个结构突变点的情形（Lumsdaine 和 Papell ，1997）。然而，正如 Prodan（2008）指出的：正确地估计突变点的个数和突变程度是十分困难的。

近年来，学者们认识到：结构突变可能是缓慢发生的和平滑的，这使得加入虚拟变量捕捉结构突变的能力令人怀疑。因而，近期有文献采用傅里叶变换来近似结构突变，并且证明单一频率的傅里叶近似就能很好地捕捉多种常见的结构突变类型，甚至能很好地捕捉瞬时的（abrupt）结构突变（如，Becker 等，2006；Enders 和 Lee，2012）。Enders 和 Lee（2012）提出傅里叶函数扩展的 DF 单位根检验（Fourier function augmented Dickey-Fuller unit root test，简称 FADF）。傅里叶函数近似结构突变的方法不需要假设外生的结构突变点和突变数，同时避免了估计结构突变点、突变数和突变程度等问题，也避免了结构突变类型误设问题，另外傅里叶函数也可以处理非线性趋势，这使得该方法十分具有竞争力。然而，平滑的结构突变（或傅里叶型结构突变）对 Dickey-Fuller（1979）单位根检验的影响还未被澄清。即，如果忽略真实数据生成过程中的平滑结构突变或不正确地考虑了平滑结构突变会有什么影响？

本文证明了 Dickey-Fuller 检验的渐进分布对傅里叶型结构突变的不变性，即当真实数据生成过程含傅里叶型结构突变时忽略该结构突变，或不正确地考虑了加入傅里叶项考虑结构突变，标准 DF 单位根检验的渐进分布依然是可用的。因此只要样本足够大，研究者可以忽略平滑结构突变而直接使用标准的 DF 检验[①]。同时，本文使用蒙特卡洛模拟为本文的理论寻找证据支持，并研究统计量收敛于 Dickey-Fuller（1979）渐进分布的速度，从而深化我们对标准 Dickey-Fuller 检验与傅里叶函数扩展型单位根检验（FADF）的理解。

二、模型

1. 傅里叶函数扩展的 DF 单位根检验（FADF）简介

假设 y_t 的数据生成过程包含未知结构的依赖于时间的确定性趋势部分 $\alpha(t)$，具体设定如下：

$$(1-\phi L)(y_t-\alpha(t)-\gamma t)=u_t \tag{1}$$

其中 u_t 是独立同分布的平稳过程，$\alpha(t)$ 是时间的确定性函数。

考虑用傅里叶近似来逼近 $\alpha(t)$：

$$\alpha(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\beta_{1k}\sin(2\pi kt/T)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{2k}\cos(2\pi kt/T);n\le T/2$$

其中 n 代表傅里叶近似中包含的频率的个数，k 表示频率，T 是样本数。Beckers 等（2006）证明单一频率的傅里叶函数就能很好地捕捉常见的结构突变类型。因此采用单一频率的傅里叶函数近似结构突变：

$$\alpha(t)=\alpha_0+\beta_1\sin(2\pi kt/T)+\beta_2\cos(2\pi kt/T) \tag{2}$$

① 所需样本大小依赖于结构突变程度。

在式（1）和（2）下，考虑回归模型：

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + c_1 + c_2 t + c_3 \sin(2\pi kt/T) + c_4 \cos(2\pi kt/T) + e_t \tag{3}$$

Enders 和 Lee（2012）建议采用 OLS 估计 ρ，其 t 统计量做单位根检验。这里，t 统计量拒绝 $\rho = 0$ 的零假设等价于拒绝（1）中单位根的零假设 $\phi = 1$。由于 Enders 和 Lee（2012）没有报告（3）中 t 统计量的渐进分布，因此定理 1 给出该渐进分布[①]。

定理 1：在数据生成过程（1）和（2），以及单位根假设 $\phi = 1$ 下，（3）中 ρ 的 OLS 估计的 t 统计量有如下渐进分布：

$$t^{E-L} \to \frac{\int_0^1 W(r)dW(r) - \mathbf{q}'\Psi^{-1}\mathbf{h}}{\left(\int_0^1 W^2(r)dr - \mathbf{h}'\Psi^{-1}\mathbf{h}\right)^{1/2}}$$

其中，$W(r)$ 是标准的维纳分布，

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} W(1) \\ W(1) - \int_0^1 W(r)dr \\ -2\pi k \int_0^1 \cos(2\pi kr)W(r)dr \\ W(1) + 2\pi k \int_0^1 \sin(2\pi kr)W(r)dr \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_1 & 1/2 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \int_0^1 W(r)dr \\ \int_0^1 rW(r)dr \\ -2\pi k \int_0^1 \cos(2\pi kr)\left[\int_0^r W(s)ds\right]dr \\ \int_0^1 W(r)dr + 2\pi k \int_0^1 \sin(2\pi kr)\left[\int_0^r W(s)ds\right]dr \end{bmatrix};$$

$$s_1 = \frac{1}{(2\pi k)^2}\sin(2\pi k) - \frac{1}{2\pi k}\cos(2\pi k), s_2 = \frac{1}{(2\pi k)^2}[\cos(2\pi k) + 2\pi k \sin(2\pi k) - 1]。$$

2. Dickey-Fuller 检验对傅里叶型结构突变的不变性

当真实的数据生成过程如（1）、（2）所示，即包含傅里叶型结构突变时，在存在单位根的零假设下，可以将数据生成过程（1）、（2）写成矩阵的形式：

$$\Delta \mathbf{y} = \tau_T \alpha + \beta_1 \Delta \Upsilon_1 + \beta_2 \Delta \Upsilon_2 + \mathbf{u}_y \tag{4}$$

$$\mathbf{y}_{-1} = \tau_T y_0 + \alpha \mathbf{t}_{T-1} + \beta_1 \Upsilon_1 + \beta_2 \Upsilon_2 + \mathbf{s}_{y,-1} \tag{5}$$

其中，$\Upsilon_1 = (\sin(2\pi k1/T), \sin(2\pi k2/T), ..., \sin(2\pi kT/T)); \tau_T = (1,1,...,1)'$

① 具体推导可向作者索要。

$\Upsilon_2=(\cos(2\pi k1/T),\cos(2\pi k2/T),...,\cos(2\pi kT/T));\Delta\mathbf{y}=(\Delta y_1,\Delta y_2,...,\Delta y_T)'$,

$\mathbf{y}_{-1}=(y_0,y_1,...,y_{T-1})',\mathbf{t}_T=(1,2,...,T)',\mathbf{u}_y=(u_1,u_2,...,u_T)',s_{y,t}=\sum_{s=1}^{t}u_t$.

如果忽略结构突变而直接使用 Dickey-Fuller（1979）单位根检验，这等价于回归模型设定为：

$$\Delta y_t=\rho y_{t-1}+c_1+c_2t+e_t \tag{6}$$

同样地，采用 OLS 估计 ρ，使用其 t 统计量来做单位根检验。这里，t 统计量拒绝 $\rho=0$ 的零假设等价于拒绝单位根的零假设。（6）中检验 $\rho=0$ 的 t 统计量为：

$$t^{DF}=\frac{\sqrt{T-3}\Delta\mathbf{y}'\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{-1}}{\left(\Delta\mathbf{y}'\mathbf{M}_{1,y}\Delta\mathbf{y}\right)^{1/2}\left(\mathbf{y}_{-1}'\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{-1}\right)^{1/2}} \tag{7}$$

其中，$\Delta\mathbf{y}=(\Delta y_1,\Delta y_2,...,\Delta y_T)',\mathbf{y}_{-1}=(y_0,y_1,...,y_{T-1})',\mathbf{M}_1=\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_1)^{-1}\mathbf{Z}_1'$，

$\mathbf{t}_T=(1,2,...,T)',\hat{\sigma}^2=\dfrac{\Delta\mathbf{y}'\mathbf{M}_{1,y}\Delta\mathbf{y}}{T-3},\mathbf{M}_{1,y}=\mathbf{I}_T-\mathbf{G}(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}',\mathbf{G}=(\mathbf{Z}_1,\mathbf{y}_{-1})$,

$\tau=(1,1,...,1)'$，$\mathbf{Z}_1=(\tau,\mathbf{t}_T)$。

对于不存在结构突变的数据生成过程，在单位根的零假设下，可以表达为如下的矩阵形式：

$$\Delta\mathbf{y}^{DF}=\tau_T\alpha+\mathbf{u}_y \tag{8}$$

$$\mathbf{y}_{-1}^{DF}=\tau_T y_0+\alpha\mathbf{t}_{T-1}+\mathbf{s}_{y,-1} \tag{9}$$

实际上，Dickey-Fuller（1979）单位根检验是基于数据生成过程（8）、（9）的。如果真实的数据生成过程是（4）、（5），那么

$$\mathbf{y}_{-1}=\mathbf{y}_{-1}^{DF}+\beta_1\Upsilon_1+\beta_2\Upsilon_2$$

$$\Delta\mathbf{y}=\Delta\mathbf{y}_i^{DF}+\beta_1\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_2-\beta_2\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_1$$

定义：$\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{u}_y}{\sigma},\xi_{y,-1}=\dfrac{\mathbf{s}_{y,-1}}{\sigma}$。注意到：

$$\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{i,-1}^{DF}=\sigma\bar{\mathbf{M}}_1\xi_{y,-1}';\mathbf{M}_1\Delta\mathbf{y}^{DF}=\sigma\mathbf{M}_1\mathbf{v};\mathbf{M}_{1,y}\Delta\mathbf{y}^{DF}=\sigma\mathbf{M}_{1,y}\mathbf{v}。$$

因此，（7）可以化为：

$$t^{DF}=\frac{\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T}+\lambda_3}{\left(\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\mathbf{v}}{T-3}+\lambda_1\right)^{1/2}\times\left(\dfrac{\sigma^2\xi_{y,-1}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T^2}+\lambda_2\right)^{1/2}} \tag{10}$$

其中，

$$\lambda_1=\frac{1}{T-3}\Bigg[2\sigma\beta_1\frac{2\pi k}{T}\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_2-2\sigma\beta_2\frac{2\pi k}{T}\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_1+\left(\beta_1\frac{2\pi k}{T}\right)^2\Upsilon_2'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_2$$
$$+\left(\beta_2\frac{2\pi k}{T}\right)^2\Upsilon_1'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_1+\beta_1\beta_2(\frac{2\pi k}{T})^2\Upsilon_2'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_1-\beta_1\beta_2(\frac{2\pi k}{T})^2\Upsilon_1'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_2\Bigg]$$

$$\lambda_2=\frac{1}{T^2}\Big[\sigma\beta_1\xi_{y,-1}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}-\sigma\beta_2\xi'_{y,-1}\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}+\sigma\beta_1\Upsilon_{1,-1}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}$$
$$+\beta_1^2\Upsilon_{1,-1}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}-\beta_1\beta_2\Upsilon_{1,-1}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}-\sigma\beta_2\Upsilon_{2,-1}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}$$
$$-\beta_2\beta_1\Upsilon_{2,-1}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}+\beta_2^2\Upsilon_{2,-1}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}\Big]$$

$$\lambda_3=\frac{1}{T}\Bigg[\beta_1\sigma\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_2'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}-\beta_2\sigma\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_1'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}+\sigma\beta_1\mathbf{v}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}$$
$$+\beta_1^2\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_2'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}-\beta_1\beta_2\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_1'\mathbf{M}_1\Upsilon_{1,-1}-\sigma\beta_2\mathbf{v}'\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}$$
$$-\beta_1\beta_2\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_2'\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}+\beta_2^2\frac{2\pi k}{T}\Upsilon_1'\mathbf{M}_1\Upsilon_{2,-1}\Bigg]$$

为了考察忽略真实数据生成过程中的傅里叶项，即忽略平滑结构突变对 Dickey-Fuller 单位根检验的影响，我们先考察$T\to\infty$时，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的极限行为。为此，我们先从 Becker 等（2006），及 Lee,Wu 和 Yang(2012)中收集如下结果：

$$\frac{\mathbf{v}'\Upsilon_2}{\sqrt{T}}\to\sigma\lambda[W(1)+2\pi k\int_0^1\sin(2\pi kr)W(r)dr],\tau'\Upsilon_2=0;$$
$$\frac{\mathbf{t}_T'\mathbf{v}}{T^{3/2}}\to W(1)-\int_0^1W(r)dr;\Upsilon_1'\Upsilon_2=0;\frac{\Upsilon_2'\Upsilon_2}{T}\to\frac{1}{2};$$
$$\frac{\mathbf{t}_T'\Upsilon_2}{T^2}\to\frac{1}{(2\pi k)^2}[\cos(2\pi k)+(2\pi k)\sin(2\pi k)-1];$$
$$\frac{\mathbf{t}_T'\Upsilon_1}{T^2}\to\frac{1}{(2\pi k)^2}\sin(2\pi k)-\frac{1}{2\pi k}\cos(2\pi k);$$
$$\frac{\mathbf{s}_{y,-1}'\Upsilon_2}{\sigma T^{3/2}}\to\lambda[\int_0^1W(r)dr+2\pi k\int_0^1\sin(2\pi kr)\left[\int_0^rW(s)ds\right]dr].$$

令$\mathbf{B}_1=diag(T^{-1/2},T^{-3/2},T^{-1})$，则$\mathbf{B}_1\mathbf{G}'\mathbf{G}\mathbf{B}_1=\mathbf{O}_{3\times3}(1)$，又：

$$\mathbf{y}_{-1}'\Upsilon_2=(\tau_Ty_0+\alpha\mathbf{t}_{T-1}+\beta_1\Upsilon_1+\beta_2\Upsilon_2+\mathbf{s}_{y,-1})'\Upsilon_2$$

所以，

$$\frac{\mathbf{B}_1\mathbf{G}'\Upsilon_2}{T-3}=\begin{bmatrix}\dfrac{\tau\Upsilon_2}{T^{1/2}(T-3)}\\ \dfrac{\mathbf{t}_T'\Upsilon_2}{T^{3/2}(T-3)}\\ \dfrac{\mathbf{y}_{-1}'\Upsilon_2}{T(T-3)}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}O(T^{-3/2})\\ O(T^{-1/2})\\ O(T^{-1/2})\end{bmatrix};\mathbf{B}_1\mathbf{G}'\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\dfrac{\tau'\mathbf{v}}{T^{1/2}}\\ \dfrac{\mathbf{t}_T'\mathbf{v}}{T^{3/2}}\\ \dfrac{\mathbf{y}_{-1}'\mathbf{v}}{T}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}O(1)\\ O(1)\\ O(1)\end{bmatrix}$$

从而，λ_1 的第一项：

$$\begin{aligned}&2\sigma\beta_1\frac{2\pi k}{T}\frac{\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\Upsilon_2}{T-3}\\ &=2\sigma\beta_1\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{\mathbf{v}'\Upsilon_2}{T-3}-\mathbf{v}'\mathbf{G}\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_1\mathbf{G}'\mathbf{G}\mathbf{B}_1)^{-1}\frac{\mathbf{B}_1\mathbf{G}'\Upsilon_2}{T-3}\\ &\to O(T^{-1})\left\{O(T^{-1/2})-\begin{bmatrix}O(1) & O(1) & O(1)\end{bmatrix}\mathbf{O}_{3\times3}(1)\begin{bmatrix}O(T^{-3/2})\\ O(T^{-1/2})\\ O(T^{-1/2})\end{bmatrix}\right\}\equiv O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

类似的，可以证明 λ_1 的第二项是 $O(T^{-3/2})$，第三、四、五、六项是 $O(T^{-2})$。因此，我们得到 $T\to\infty$ 时，$\lambda_1=O(T^{-3/2})$。[①]

遵循和 λ_1 相同的计算步骤，可以得到 $\lambda_2=O(T^{-1/2})$ 和 $\lambda_3=O(T^{-1/2})$。[②]特别需要指出的是：从证明过程可以看出，这些偏差项趋于零的速度不但依赖于 T，也依赖于结构突变参数。

将以上这些结果代入（10），得：

$$\begin{aligned}t^{DF}&=\frac{\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T}+\lambda_3}{\left(\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\mathbf{v}}{T-3}+\lambda_1\right)^{1/2}\times\left(\dfrac{\sigma^2\xi_{y,-1}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T^2}+\lambda_2\right)^{1/2}}\\ &=\frac{\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T}+O(T^{-1/2})}{\left(\dfrac{\sigma^2\mathbf{v}'\mathbf{M}_{1,y}\mathbf{v}}{T-3}+O(T^{-3/2})\right)^{1/2}\times\left(\dfrac{\sigma^2\xi_{y,-1}'\mathbf{M}_1\xi_{y,-1}}{T^2}+O(T^{-1/2})\right)^{1/2}}\\ &\to\frac{\int_0^1W(r)dW(r)-\mathbf{q}_1'\Psi_1^{-1}\mathbf{h}_1}{\left(\int_0^1W^2(r)dr-\mathbf{h}_1'\Psi_1^{-1}\mathbf{h}_1\right)^{1/2}}\end{aligned}\tag{11}$$

① 各项的推导过程和第一项一样，为了节省空间，省去了详细证明。这些证明可以向作者索要。

② 如有需要，λ_2 和 λ_3 详细的过程也可以向本文作者索取。

其中，$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix} W(1) \\ W(1)-\int_0^1 W(r)dr \end{bmatrix}$，$\mathbf{h}_1=\begin{bmatrix} \int_0^1 W(r)dr \\ \int_0^1 rW(r)dr \end{bmatrix}$；$\Psi_1=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$。

这里，（11）式即为 Dickey-Fuller（1979）的渐进分布。也就是说：由于不正确地处理傅里叶项的偏差在大样本下接近于零，当真实的数据生成过程中包含平滑结构突变时，忽略平滑结构突变的 OLS 回归方程中，检验单位根的 t 统计量和标准 Dicke-Fuller 检验的渐进分布一样；另一方面，不正确地加入傅里叶项不影响 DF 检验的大样本可用性。Amsler 和 Lee（1995）证明：在单位根的零假设下，Dickey-Fuller（1979）的渐进分布不受单次的瞬时结构突变的影响，其中的直觉是：数据生成过程中单次的瞬时结构突变只影响对应差分过程的一个样本。Montanes 和 Reyes（1999）得出了相同的结论。我们的证明表明：虽然含傅里叶型结构突变的数据生成过程影响对应差分过程的所有样本点，但 DF 渐进分布依然对傅里叶型突变是不变的。综合这些结果得到：只要样本足够大，检验单位根时，研究者可以忽略任何形式的结构突变，而 Dickey-Fuller（1979）的渐进分布仍然是可用的。然而，正如下文的模拟所示，如果结构突变程度很大，即使样本 T=1000，有限样本的扭曲依然十分严重，这影响了 DF 渐进分布对有限样本的近似效果。因而，本文的结果并不否定考虑结构突变对有限样本检验功效的意义。

三、蒙特卡洛模拟

上一节的推导表明：即使真实的数据生成过程包含结构突变，忽略结构突变的标准 Dickey-Fuller 渐进分布依然是可用的。即，只要样本足够大，忽略结构突变不会造成标准的 Dickey-Fuller 单位根检验的有限样本性质扭曲。本节使用蒙特卡洛模拟为此提供证据，并考察 t^{DF} 统计量收敛于渐进分布的速度。此外，本节也考察傅里叶函数扩展型单位根检验（FADF）在真实数据生成过程含结构突变时的小样本性质。本文中的蒙特卡洛实验均使用 Gauss 写成，在 5%的显著性水平下，每组参数进行 20000 次蒙特卡洛实验而得到。

1. 真实数据生成过程包含平滑结构突变时标准 DF 单位根检验的表现

数据生成过程为（1）、（2），其中 $\alpha_0=1,\gamma=1$，u_t 取独立的标准正态分布。与 Enders 和 Lee（2012）一样，ϕ 取 1 或 0.9，分别对应单位根检验的检验水平（size）和检验功效（power）；β_1 取 0 或 3，β_2 取 0 或 5；频率参数 k 取 1, 2, 3；需要指出的是：变换结构突变的参数并不影响模拟的结论。但我们考察的样本比 Enders 和 Lee（2012）更多，包含 $T=100,200,500,1000,2000$。真实数据生成过程包含傅里叶型平滑结构突变时，标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验的表现如表 1 所示。

从表 1 中，可以看出，在本文设定的结构突变参数下，当样本 T 达到 2000 时，标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验有理想的检验功效；样本 T 达到 5000 时，标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验的检验水平和检验功效都非常理想。当然，可以同样地验证：任意的结构突变参数，只要样本足够大，标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验都有良好的检验功效和检验水平[①]。当然，结构突变参数越大，（7）中的忽略结构突变的统计量趋于标准 DF 渐进分布的速度越慢，使得标准 DF 检验可行所需的样本也越大。

既然只要标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验在样本够大时有理想的检验水平和检验

① 其他结构突变参数下的模拟结果和本文结论一致。

功效，那么，为什么研究者还需要考虑结构突变的单位根检验呢？答案是：考虑结构突变能促进小样本检验功效。从表 1 也可以看出：在本文报告的结构突变参数下，当样本小于 1000，特别是小于 500 时，标准 DF 单位根检验的检验功效十分低下，甚至可能接近无法识别出平稳序列。而实际应用中，我们的样本小于 500 是十分常见的，这使得考虑结构突变在单位根检验中十分重要。

表 1 真实数据生成过程含平滑结构突变时标准 Dickey-Fuller（1979）单位根检验的表现

DGP			T=100		T=200		T=500		T=1000		T=2000		T=5000	
	β_1	β_2	ϕ：1	ϕ:0.9	ϕ：1	ϕ:0.9	ϕ：1	ϕ:0.9	ϕ：1	ϕ:0.9	ϕ：1	ϕ:0.9	ϕ:1	ϕ:0.9
k=1	3	5	0.0022	0.0000	0.0111	0.0002	0.0299	0.0044	0.0366	0.7122	0.0480	1.0000	0.0510	1.0000
	0	5	0.0077	0.0000	0.0228	0.0011	0.0360	0.0340	0.0432	0.9521	0.0450	1.0000	0.0520	1.0000
	3	0	0.0265	0.0510	0.0345	0.2529	0.0437	0.9906	0.0458	1.0000	0.0500	1.0000	0.0490	1.0000
k=2	3	5	0.0000	0.0000	0.0006	0.0000	0.0088	0.0000	0.0199	0.5590	0.0360	1.0000	0.0510	1.0000
	0	5	0.0007	0.0000	0.0046	0.0000	0.0192	0.0320	0.0290	0.9534	0.0440	1.0000	0.0480	1.0000
	3	0	0.0063	0.0170	0.0170	0.0880	0.0311	0.9070	0.0409	1.0000	0.0410	1.0000	0.0500	1.0000
k=3	3	5	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0027	0.0000	0.0109	0.5422	0.0170	1.0000	0.0450	1.0000
	0	5	0.0004	0.0000	0.0028	0.0000	0.0103	0.0170	0.0257	0.9536	0.0390	1.0000	0.0520	1.0000
	3	0	0.0005	0.0040	0.0069	0.0560	0.0230	0.8830	0.0324	1.0000	0.0360	1.0000	0.0500	1.0000

2. 平滑结构突变与瞬时结构突变下 FADF 的小样本表现

本小节考察傅里叶扩展型单位根检验（FADF）的小样本性质。首先，在含平滑结构突变的数据生成过程下，即（1），（2）下，考察 FADF 的小样本性质。具体的参数设定如上节所述。模拟结果如表 2 所示。对比表 1 和表 2 的结果发现：FADF 相对于标准的 DF 检验，小样本性质有十分显著的改善；FADF 当样本大于 200 时，尤其样本大于 500 时，检验功效十分理想。

表 2　　真实数据生成过程含平滑结构突变时 FADF 的小样本表现

DGP			T=100		T=200		T=500		T=1000	
	β_1	β_2	ϕ=1	ϕ=0.9	ϕ=1	ϕ=0.9	ϕ=1	ϕ=0.9	ϕ=1	ϕ=0.9
k=1	3	5	0.0458	0.1669	0.0525	0.4355	0.0502	0.9977	0.0502	1.0000
	0	5	0.0457	0.1651	0.0535	0.4354	0.0515	0.9980	0.0505	1.0000
	3	0	0.0535	0.1273	0.0509	0.3427	0.0506	0.9952	0.0501	1.0000
k=2	3	5	0.0503	0.2570	0.0631	0.6180	0.0551	1.0000	0.0545	1.0000
	0	5	0.0506	0.2180	0.0641	0.5740	0.0563	1.0000	0.0540	1.0000
	3	0	0.0576	0.1990	0.0519	0.5120	0.0503	1.0000	0.0505	1.0000
k=3	3	5	0.0555	0.2560	0.0625	0.7150	0.0599	1.0000	0.0541	1.0000
	0	5	0.0576	0.2990	0.0618	0.7030	0.0578	1.0000	0.0544	1.0000
	3	0	0.0622	0.1950	0.0546	0.6020	0.0529	1.0000	0.0522	1.0000

接下来，本文考察真实数据生成过程包含瞬时结构突变时，FADF 的小样本表现。即，考虑真实数据生成过程中包含瞬时结构突变，但研究者使用傅里叶函数近似结构突变。考虑 Perron（1989）的危机模型（crash model），在单位根的零假设下，数据生成过程为：

$$y_t = \mu + dD(TB)_t + y_{t-1} + e_t \tag{12}$$

其中，$D(TB)_t = 1$，当$t = T_B + 1$；$D(TB)_t = 0$，当$t \neq T_B + 1$。备则假设下，数据生成过程为：

$$y_t = \mu + \beta t + dDU_t + e_t \tag{13}$$

其中，$DU_t = 1$，当$t > T_B$；$D(TB)_t = 0$，当$t \leq T_B$。

与 Montanes 和 Reyes（1999）类似，设置瞬时结构突变程度的参数$d \in \{6,7,8,9,10\}$，结构突变的时点$\lambda = \frac{T_B}{T} = \{0.25, 0.5, 0.75\}$。模拟时$e_t$取自$i.i.d.N(0,1)$。设$\mu = \beta = 1$。需要指出的是：变换参数不影响模拟的结论。

当真实数据生成过程包含瞬时结构突变时，从表 3 的模拟结果可以看出：傅里叶函数扩展型单位根检验[①]（FADF）相对于标准 DF 检验，检验功效得到了显著的提高。尤其当结构突变程度较严重时，FADF 对检验功效的提高十分明显。

表 3　当真实数据生成过程含瞬时结构突变时的 FADF 与 DF 的小样本表现

λ	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75
	检验功效			检验水平		
d	傅里叶函数扩展型 DF 检验（FADF）					
6	1.000	1.000	1.000	0.056	0.042	0.051
7	0.997	0.998	0.997	0.043	0.041	0.045
8	0.989	0.987	0.981	0.034	0.032	0.034
9	0.960	0.946	0.928	0.035	0.031	0.038
10	0.847	0.849	0.866	0.033	0.027	0.037
	标准 DF 检验					
6	0.9533	0.981	0.973	0.039	0.041	0.039
7	0.703	0.977	0.799	0.036	0.034	0.036
8	0.325	0.867	0.435	0.029	0.031	0.029
9	0.077	0.601	0.138	0.025	0.026	0.027
10	0.001	0.324	0.024	0.022	0.023	0.022

四、结论

本文研究在真实数据生成过程含平滑结构突变时，标准 Dickey-Fuller 检验的大样本行为，证明了 DF 检验的大样本可用性不受平滑结构突变的影响。因此，只要样本足够大，研究者可以不用考虑结构突变而直接使用标准的 DF 单位根检验。蒙特卡洛模拟的证据与本文的理论预测一致。

然而，结构突变参数越大，忽略结构突变的回归方程中，t 统计量趋于标准 DF 渐进分

① 这里不失一般性设 k=1.k=2,3 可以得出类似于 k=1 的结果。

布的速度越慢，使得标准 DF 检验可行所需的样本也越大，同时，本文的蒙特卡洛模拟也指出：忽略结构突变的标准 DF 检验的小样本性质十分差，因此考虑结构突变对于促进小样本性质十分重要；另外，傅里叶函数扩展型 DF 检验（FADF）对含平滑结构突变和瞬时结构突变的时间序列都有较理想的小样本性质。

参考文献

[1] Amsler, C., and Lee, J., 1996, An LM test for a unit root in the presence of a structural change [J], Econometric theory, 11(2), 359~368.

[2]Beckers, R., Enders, W. and Lee, J., 2006, A stationary test in the presence of an unknown number of smooth breaks [J], Journal of time series Analysis, 27(1), 381~409.

[3] Dickey, D.A., and W.A., Fuller, 1979, Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root [J], Journal of the American statistical association, 74(366), 427~31.

[4] Enders, W., and J., Lee, 2012, The flexible Fourier form and Dickey-Fuller type unit root tests [J], Economics Letters, 117, 196~199.

[5] Lee, C., Wu, J-N., Yang L.X., 2012, A panel unit root test with smooth breaks and cross-sectional dependence, Working paper.

[6] Lumsdaine R. L., and Papell, D. H., 1997, Multiple trend breaks and the unit root hypothesis [J], The review of economics and statistics, 79, 212~217.

[7] Montanes, A., and Reyes, M., 1999, The asymptotic behavior of the Deikey-Fuller tests under the crash hypothesis [J], Statistics and Probability letters, 42, 81~89.

[8] Nelson, C. R., and C. I. Plosser, 1982, Trends and random walks in macroeconomic time series [J], Journal of monetary economics, 10, 139~162.

[9] Perron, P., 1989, The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis [J], Econometrica, 57(6), 1361~1401.

[10] Prodan, R., 2008, Potential pitfalls in determining multiple structural changes with an application to purchasing power parity [J], Journal of Business and economics statistics, 26, 50~65.

[11] Zivot, E., and W. K. D., Andrews, 1992, Further evidence on the great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis [J], Journal of Business and economics statistics, 20(1), 25~44.